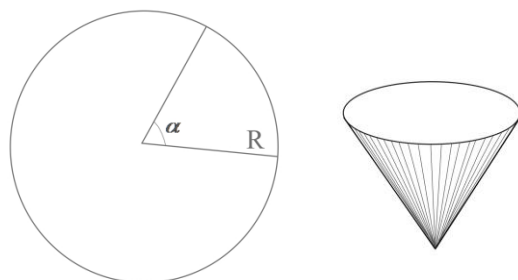


Пожарное ведро представляет собой конус, изготовленный из стального диска радиуса R , из которого вырезали сектор в α радиан, а затем свернули и заварили получившийся шов. Каким должен быть угол α , чтобы объём ведра был максимальным?



Решение.

Объём конуса

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h, \tag{1}$$

где S — площадь основания, h — высота.

Площадь основания конуса $S = \pi \cdot r^2$, где r — радиус основания.

Длина окружности основания $l = 2 \cdot \pi \cdot r$ равна разности длины края диска и длины края вырезанного сектора, то есть, $l = (2 \cdot \pi - \alpha) \cdot R$.

Из равенства $2 \cdot \pi \cdot r = (2 \cdot \pi - \alpha) \cdot R$ имеем $r = \left(1 - \frac{\alpha}{2 \cdot \pi}\right) \cdot R$.

По теореме Пифагора $R^2 = h^2 + r^2$, следовательно, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Подставим S и h в (1) и получим $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$.

Исследуем теперь функцию $V(r)$ на экстремум на отрезке $[0, R]$.

Производная $V'(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot r \cdot R^2 - 3 \cdot r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ равна нулю в точке $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$ и при $r = 0$, положительна на

интервале $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R\right)$ и отрицательна на $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R, R\right)$, $V(r) \geq 0$ на отрезке $[0, R]$ и $V(0) = V(R)$.

Значит, максимум при $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R \Rightarrow (2 \cdot \pi - \alpha) \cdot R = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R \Rightarrow \alpha = 2 \cdot \pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Это примерно 66 градусов.

Критерии оценивания (максимум 25 баллов)

Записано выражение объёма +11 баллов, найдена точка экстремума +7, обосновано, что это точка максимума +7. Если решение содержит арифметические ошибки, но при этом идея верна и исследование на экстремум проведено полностью, то 20 баллов.

Замечание 1. Задача имеет второй способ решения, когда составляют зависимость $v(\alpha)$. Критерии оценивания аналогичные тем, что выше.

Замечание 2. Если участник понял условие иначе, и сворачивал ведро из того сектора, который был вырезан, то правильный ответ получится $\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Конечно объём ведра при этом не изменится. При такой трактовке ход решения аналогичен и критерии оценивания тоже полностью аналогичны.

Интересно, что пожарные вёдра делают не по этой выкройке. Потому, что если вырезать угол больше, то вода при переноске расплещивается меньше.

Цитата с сайта МЧС России (<https://mchs.gov.ru/>):

Если присмотреться к средствам защиты от пожара, то можно заметить, что на пожарном щите ведро коническое. Почему у него такая форма?

Для начала обратимся к истории. Ведра конической формы появились на кораблях. Их изготавливали из парусины, сложенной в несколько рядов и сшитой в форме конуса. Данная форма ведра была обусловлена тем, что морякам было удобно набирать воду, выбросив конусообразное ведро за борт на длинной веревке. Такое ведро не приходилось топить, конус прекрасно погружался под воду, что позволяло набрать воды без промедления.

С появлением в Англии первых пожарных команд конусообразное ведро перешло к ним на вооружение. Во-первых, конус оправдал себя в работе, во-вторых, в пожарных командах было немало отставных матросов, которые привнесли с флота свои удачные наработки.

При тушении пожаров конус пришелся как нельзя кстати: им можно было быстро зачерпнуть воду, не тратя время на "утопление" обычного ведра, основанием конусообразного ведра можно было легко разбить кромку льда в холодное время года.

Кроме того, пожарная практика показала, что из конусообразного ведра вода практически не расплещивается, когда пожарный бежит с наполненным ведром. Вода, выплеснутая из конусообразного ведра, точнее попадает в цель, да и выплеснуть ее можно на большее расстояние, чем из обычного ведра.

С технической точки зрения конусообразное ведро также удобнее обыкновенного – оно имеет всего один сварочный шов, и, помимо того, что себестоимость изготовления данного ведра меньше, оно более устойчиво к разрушениям и деформациям при падении.

Конус позволяет быстро зачерпывать песок, словно совком, что тоже немаловажно при тушении пожаров. Пожарный, держа конусообразное ведро одной рукой за вершину конуса (то есть за дно ведра) без особых усилий сможет зачерпнуть песок, не тратя время на насыпание песка в ведро лопатой или пытаясь зачерпнуть его обычным ведром, малоприспособленным для таких целей.

Кроме того, конусообразная форма ведра является прекрасной защитой от воровства – в хозяйстве от такого ведра проку мало, поэтому вероятность того, что оно не будет украдено, а будет продолжать висеть на пожарном щите, гораздо больше, чем если бы на щите размещалось обыкновенное ведро.

Как мы видим, ведро такой необычной конусной формы имеет целый ряд преимуществ при хранении и использовании при пожаре, а, значит, облегчает борьбу с огнём.